OBRA SOCIAL
L'ÀNIMA DE "LA CAIXA"

Dossier educatiu

Quan els números canten

Taller de música

Obra Social
Fundació "la Caixa"

Índex

Edita: Fundación "la Caixa"
Textos: Josep Maria Roger
Disseny gràfic: WHADSIACCENT

Quan els números canten és un taller que ens proposa explorar alguns dels llocs comuns, les interseccions entre dos coneixements sovint dissociats: els números i els sons.

La música i les matemàtiques són dos llenguatges, encara que aparentment llunyans, molt relacionats entre si. Un acord, una melodia, corresponen a un fet físic, a una proporció matemàtica estudiada des de Pitàgores. Quan relacionem els números i els sons ens podem adonar que la creació musical, ni que sigui de diferents cultures, èpoques i estils, s'assembla a la creació matemàtica en l'estructura, la proporció, la bellesa formal, les expectatives…

Per a qui?

Aquest taller està pensat per a un grup-classe d'alumnes de secundària, batxillerat o cicles formatius. Vol incidir en l'eixamplament del paper de la música a secundària com a pont entre coneixements i, alhora, pretén convidar el professorat de matemàtiques a participar de la música com una eina formativa més de la seva especialitat.

Amb quins objectius?

Fonamentalment:

1. Relacionar aquelles interseccions entre la música i les matemàtiques que creiem que han de ser les primeres que cal tractar:
   - **la mitjana aritmètica**
   - **el ritme**
   - **el número d'or**
2. Experimentar amb uns símbols abstractes que expressen idees i fets científics (matemàtiques) o sentiments i emocions (música).
3. Valorar la importància de la coherència interna d'una obra (la relació de les parts amb el tot, la proporció, la bellesa formal, etc.).
4. Incentivar la creació d'expectatives, en el nostre cas, aplicades a un breu projecte musical.

Sabíeu que en la nostra música preferida hi ha pitàgores?

Si us agrada escoltar músiques d'estils ben diferents, ja sigui de pop, rock, jazz, clàssica o africana..., probablement el que més us atregui és poder gaudir d'una música per a cada moment, en tota la seva diversitat, ja que no semblen tenir res en comú. El ritme és completament diferent en unes i altres; la melodia, no cal dir-ho!; els instruments, també... Però hi ha un aspecte que les uneix, hi ha uns sons bàsics que comparteixen.

Són aquells sons que s'ha anat veient que combinaven millor, que sonen millor a l'oïda (les anomenades consonàncies) i que més hem utilitzat per expressar-nos a través de la música.

La primera persona de la qual se sap que va estudiar per què uns sons combinen millor que altres entre si va ser **Pitàgores** (s. VI aC). El pensador romà Boeci (s. VI), en el tractat De Institutione Musica I, 10-11, explica que Pitàgores en passar per davant d'una ferreria es va adonar que les encluses on picaven els ferrers feien sons diversos, i que aquests sons eren consonants. Això el va portar a fer diversos experiments: amb diferents pesos lligats a cordes, amb flautes, amb gots d'aigua, etc.

Pitàgores i els seus deixebles van fer diversos experiments, un dels quals amb una corda mantinguda en tensió constant i fent-la vibrar tant en tota la llargada com en la seva meitat. El resultat va ser que en aquesta meitat de corda s'obtenia el mateix so però més agut que el de la corda sencera i que l'interval entre els dos sons era —és— l'octava (1/2). De la mateixa manera, dividint la corda en tres parts iguals i fent-ne sonar dues terceres parts, l'interval resultant entre aquest fragment i la corda sencera és la quinta (2/3), i dividint-la en quatre parts i fent-ne sonar tres s'obté la quarta (3/4). Si ho apliquem a un instrument, la longitud sencera és, posem per cas, un do; la meitat, el do més agut (octava), i entremig tindríem el fa (quarta) i el sol (quinta).

Aquestes relacions de longitud de corda obeïen a unes proporcions matemàtiques, a la relació entre dos números, les anomenades **mitjanes**. Així van establir la relació entre els números i l'harmonia musical.

Així ocorre també amb la naturalesa de la veu. La consonància que resulta d'escoltar una melodia cantada per un tenor i una soprano és l'octava, la relació de longitud 1/2; si aquesta melodia del tenor l'ha de cantar un baix, aquest ho farà cinc notes més greus, una quinta, la relació 2/3, i si la canta una contralt, respecte del tenor, ho farà quatre notes més agudes, una quarta, la relació de 3/4.

Els intervals successius de quinta (do, sol, re, la, mi...) són les notes que disposades gradualment proporcionen les diferents escales musicals i també tenen una importància decisiva en el tipus de so dels instruments.

El ritme... aritmètic!

El ritme es mesura en conjunts d'un nombre indeterminat de pulsacions (el compàs de 2, de 3, de 4...); és **l'aritmètica en el temps**. Cada pulsació es pot fer més lenta multiplicant-la o bé més ràpida dividint-la, sense aturar-se de principi a fi.

Si toquem alhora dos conjunts de pulsacions, dos compassos diferents, com ara un de 3 i un altre de 4, en resulta una pulsació coincident cada 12 pulsacions, que n'és el mínim comú múltiple.

La música «divinament» organitzada

Una de les característiques de les grans obres musicals és la connexió de cadascuna de les parts amb el tot (quan un ritme o un tema melòdic va apareixent de tant en tant modificat, desenvolupat, tocat per instruments diferents, creixent o disminuint d'intensitat...), és a dir, aquella relació que fa que el resultat d'una obra, quan està ben construïda, sigui quelcom més que la suma de les parts, que el conjunt esdevingui una estructura extraordinària quan es tracta d'una obra mestra.

Sovint aquestes proporcions són presents en les millors obres de totes les arts. Però resulta que hi ha un model de proporció ideal que ens ha donat la natura i que es pot veure perfectament en el creixement de les plantes, els animals... El desenvolupament físic de les persones també s'ajusta a aquesta proporció. Una proporció anomenada «divina» quan es creia que venia donada pels déus, o «àuria» (el número «d'or») quan s'ha tingut aquest mineral com el bé més preuat...

Aquesta proporció és representada per ϕ=1'618 i la trobem a moltes pintures, escultures, en arquitectura..., i també la podem trobar en les composicions musicals de Beethoven, Mozart, Debussy, Bartók...

Podrem comprovar-ho quan tinguem l'experiència de fer una peça breu, formalment coherent, que creï expectatives i que relacioni les parts amb el tot, utilitzant una sèrie de sons programats a l'ordinador, amb l'objectiu d'arribar a un punt culminant (la proporció àuria).

Per als que en vulguin més

La mitjana aritmètica la fem servir cada dia, es coneix com «la mitjana», a seques: la meitat de la suma. Però per als que en vulguin saber més,* és possible que no conegueu tant la mitjana harmònica. Aquesta, més complicada que l'aritmètica, és atribuïda a un destacat membre de l'escola pitagòrica, Hipes, i se sol definir així: el primer número supera el segon en una fracció d'ell mateix; mentre que el segon supera el tercer en la mateixa fracció del tercer.

Vegem un exemple amb els números 12, 8 i 6.

8 és la mitjana harmònica de 12 i 6 perquè el 12 supera el 8 en 4, que és un terç de 12; i el 8 supera el 6 en 2, que és un terç de 6.

$$a - b : a = b - c : c$$

$$(a-b)\,c = a\,(b-c) \;//\; ac - bc = ab - ac \;//\; 2ac = bc + ab \;//\; 2ac = b\,(c+a) \;//\; b = 2ac:a+b$$

(*) El professor Ramon Nolla de l'IES Pons d'Icart de Tarragona ha fet un treball molt interessant sobre la mitjana harmònica amb els seus alumnes. El podeu consultar a http://www.xtec.net/~rnolla/apunts/MitjHarmoni.pdf.

Per acabar...

El premi Nobel de Física C. Cohen-Tannoudji explica que Einstein sovint havia escollit entre dues equacions diferents que explicaven un mateix fenomen i que sempre s'havia decidit per l'equació més bonica. «I quina és l'equació més bonica?», van preguntar al cèlebre descobridor de la teoria de la relativitat. I aquest va respondre: «L'equació més bonica és la que diu més i millor en menys signes».

«L'equació més bonica és la que diu més i millor en menys signes».

Amb la música passa una cosa semblant, sovint les gran obres han estat creades a partir de motius curts i senzills (qui no recorda el ritme de l'entrada de la 5a simfonia de Beethoven amb el toc, toc, toc, toooooc!).

En el terreny de la creació, matemàtics i compositors fan descobriments que de moment no saben per què serviran, les seves troballes potser no seran reconegudes fins d'aquí a molts anys... **Quan els números canten** és un taller de música que ja es justificaria si pogués ser recordat només per un sol dels aspectes experimentats.

Bibliografía recomendada

- **Alsina, C**. *Estimar les matemàtiques.* Columna Assaig.
- **Blaking, J.** *Fins a quin punt l'home és músic?* Eumo Ed.
- **Bult, B.; Hobbs, D.** *Léxico de matemáticas.* Akal Diccionarios.
- **Candé, R.** *de. Diccionari de la música.* Edicions 62.
- **Cohen-Tannoudji, C.** *Entrevista a La Vanguardia,* 19-04-04.
- **Diversos autors.** *Fotografiando las matemáticas.* Ed. Carroggio.
- **Donington, R.** *Los instrumentos de música.* Alianza Editorial.
- **Enzensberger, H. M.** *El diable dels nombres.* Ed. Siruela.
- **Goldáraz Gaínza, J.J.** *Afinación y temperamento en la música occidental.* Alianza Música.
- **González Urbaneja, P.M.** *Pitágoras. El filósofo del número.* Nivola.
- **Guedj, D.** *El teorema del lloro.* Ed. Empúries.
- **Hoppin, Richard H. (ed.)** *Medieval Music. The Anthology of Music.* Oxford University Press.
- **Nolla, Ramon.** Apunt sobre la mitjana harmònica. IES Pons d'Icart. Tarragona: 2006.
  http://www.xtec.net/~rnolla/apunts/MitjHarmoni.pdf.